

Baden-Württemberg

Leistungsfach Mathematik

Schriftliche Abiturprüfung
ab 2024

Informationen

Beispielaufgabe

Hinweis

Dieses Konvolut „Abitur ab 2024“ führt die entsprechende Zusammenstellung „Abitur ab 2023“ fort

Inhaltliche Änderungen gibt es nur in geringem Umfang (entsprechend markiert auf den Seiten 3, 4, 5 und 7). Ansonsten gelten die inhaltlichen Aussagen des Konvoluts „Abitur ab 2023“ unverändert weiter.

Die strukturellen Änderungen der Prüfungsaufgaben sowie die Einführung des IQB-Formeldokuments anstelle der bisherigen Merkhilfe ergeben sich durch Vereinbarungen auf KMK-Ebene.

Zur Illustration der neuen Struktur dient eine aus unveränderten IQB-Aufgaben (überwiegend aus dem Prüfungsjahr 2021) zusammengestellte Beispielaufgabe.

Aus Platzgründen enthält dieses Konvolut nicht noch einmal die Beispielaufgabe und den Aufgabenfundus aus der Zusammenstellung „Abitur ab 2023“. Alle dort gesammelten Aufgaben sind weiterhin uneingeschränkt zur Prüfungsvorbereitung für die Abiturprüfung auch ab 2024 geeignet.

Inhalt

Allgemeine Informationen

Struktur und Rahmenbedingungen	1
Inhaltsbezogene Kompetenzen.....	3
Kompetenzen im Bereich der Gleichungslehre	6
Notationen	9
Dokumentation von Schülerlösungen, Operatoren	10

Beispielaufgabe

Aufgaben	11
Lösungen	27

Struktur eines Aufgabensatzes

Teil A (ohne Hilfsmittel) 30 BE

Zu bearbeiten sind sechs Aufgaben à 5 BE.

Block 1: vier „elementare“ Aufgaben (ohne AB III)
keine Auswahlmöglichkeit

- P1, P2 Analysis
- P3 Geometrie
- P4 Stochastik

Block 1 (20 BE)

Block 2: sechs „komplexere“ Aufgaben (mit AB III)
Prüfling wählt zwei beliebige Aufgaben aus

- W1, W2 Analysis
- W3, W4 Geometrie
- W5, W6 Stochastik

Block 2 (10 BE)

Teil B (mit Hilfsmitteln)

Analysis 40 BE

Die Lehrkraft wählt zwischen I 1 und I 2.

I 1 (40 BE)

I 2 (40 BE)

Geometrie 25 BE

Die Lehrkraft wählt zwischen II 1 und II 2.

II 1 (25 BE)

II 2 (25 BE)

Stochastik 25 BE

Die Lehrkraft wählt zwischen III 1 und III 2.

III 1 (25 BE)

III 2 (25 BE)

Innere Struktur der Aufgaben

Grundsätzlich bildet jeder Arbeitsauftrag eine eigene Teilaufgabe mit eigens ausgewiesenen (und in dieser Aufschlüsselung in die Korrekturformblätter einzutragenden) Bewertungseinheiten; die bisherige „Bündelung“ mehrerer Arbeitsaufträge zu einer Teilaufgabe entfällt.

Erwartungshorizonte (statt bisher „Lösungshinweise“)

Erwartungshorizonte – entweder übernommen von IQB-Aufgaben oder angepasst an deren Stil – sind vergleichsweise knapp formuliert. Grundsätzlich gilt:

„Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.“

Im Anschluss an den Erwartungshorizont einer Aufgabe werden jeweils tabellarisch für jede Teilaufgabe die allgemeinen mathematischen Kompetenzen gem. KMK-Standards (K1 – K6) sowie die Zuordnung zu den Anforderungsbereichen (AB I, AB II, AB III) ausgewiesen.

Arbeitszeit

Die Arbeitszeit beträgt insgesamt 300 Minuten.

Die Prüflinge erhalten zu Prüfungsbeginn alle zu bearbeitenden Aufgaben.

Jeder Prüfling entscheidet selbst über den Zeitpunkt, zu dem er die Bearbeitung zum Prüfungsteil A abgibt und die Hilfsmittel für den Prüfungsteil B erhält. Diese Abgabe muss jedoch spätestens nach 100 Minuten erfolgen.

Hilfsmittel

Hilfsmittel für den Prüfungsteil B sind der im Kurs eingeführte, den Vorgaben des KM-Erlasses entsprechende **wissenschaftliche Taschenrechner** (ohne Handbuch oder andere Anleitung) sowie das **IQB-Formeldokument**.

Inhaltsbezogene Kompetenzen

Vorbemerkung

Die Angabe „nicht“ bedeutet jeweils, dass Schülerinnen und Schüler in Bezug auf diesen Inhalt über keine spezifischen Kompetenzen verfügen müssen; sie bedeutet aber nicht, dass dieser Inhalt in keiner Form Gegenstand der schriftlichen Prüfung sein kann.

Die Angabe „**neu**“ bedeutet jeweils, dass dieser Inhalt erstmals im Abitur 2024 Gegenstand der schriftlichen Prüfung sein kann.

Gleichungen

s. unten: „Erwartete Kompetenzen im Bereich der Gleichungslehre“

Analysis

- Kenntnis grundlegender Funktionstypen und ihrer charakteristischen Eigenschaften:
 - ganzrationale Funktionen
 - natürliche Exponentialfunktionen
 - Sinus- und Kosinusfunktionen
 - einfache Wurzelfunktionen
 - einfache gebrochen-rationale Funktionen
 - einfache natürliche Logarithmusfunktionen
 - einfache allgemeine Exponentialfunktionen (**neu**)
- Wirkung von Parametern, insbesondere:
 - Verschiebungen in x- und y-Richtung
 - Streckungen in x- und y-Richtung
 - Spiegelungen an x- bzw. y-Achse
- Zusammengesetzte Funktionen:
 - Summen, Differenzen
 - einfache Produkte, Quotienten
 - einfache Verkettungen
- Umkehrfunktion
 - Definitions- und Wertemenge, Graph, Funktionsterm
- Bestimmung von Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften
- Funktionenscharen
 - nicht: Ortslinien
- Ableitung (auch höhere Ableitungen)
- Änderungsrate
- Ableitungsfunktion
- Tangente und Normale
- Ableitungsregeln:
 - Summen- und Faktorregel
 - Potenzregel
 - Produktregel
 - Kettenregel
 - nicht: Ableitung allgemeiner Exponentialfunktionen

- Untersuchung von Funktionen und Graphen, insbesondere:
 - Definitions- und Wertemenge
 - Nullstellen
 - elementare Symmetrie
 - Grenzverhalten, senkrechte und waagerechte Asymptoten
 - Monotonie, Krümmungsverhalten
 - Extrempunkte, Wendepunkte
- Anwendung der Differenzialrechnung, insbesondere:
 - Extremwertbestimmungen, auch mit Nebenbedingungen
- Stammfunktionen:
 - Summenregel
 - Faktorregel
 - lineare Substitution
 - nicht: Stammfunktion der ln-Funktion
 - nicht: Stammfunktionen allgemeiner Exponentialfunktionen
- Integral
- Integralfunktion
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
- Anwendungen der Integralrechnung:
 - rekonstruierter Bestand
 - Volumen von Rotationskörpern
 - nicht: Mittelwert
 - nicht:** Flächenberechnung unbegrenzter Flächen, uneigentliche Integrale
- nicht: Näherungsverfahren (zur Bestimmung von Nullstellen bzw. der Eulerschen Zahl e)

Analytische Geometrie

- Vektor, Ortsvektor, Linearkombination, Betrag
- Geraden
- Ebenen (Parameter-, Koordinaten-, Normalenform)
- Geraden- und Ebenenscharen
- Lagebeziehungen
- Skalarprodukt
- Vektorprodukt
- Orthogonalität
- Spiegelungen
- Abstands- und Winkelberechnungen
 - auch: Abstand windschiefer Geraden
- Flächen- und Volumenberechnungen
- zeichnerische Darstellung von Objekten im Raum:
 - Schrägbilder, Spurpunkte, Spurgeraden
- Anwendung der analytischen Geometrie:
 - Bewegungen im Raum
- nicht: Beweise mit Hilfe von Vektoren

Stochastik

- elementare Kombinatorik
- mehrstufige Zufallsexperimente, Baumdiagramme, Pfadregeln, Vierfeldertafeln
- bedingte Wahrscheinlichkeit, stochastische Unabhängigkeit
- diskrete Zufallsgröße
Wahrscheinlichkeitsverteilung
Erwartungswert, Standardabweichung, Varianz (**neu**)
- Binomialverteilung
Formel von Bernoulli
Erwartungswert, Standardabweichung, Varianz (**neu**)
Histogramme
- Testen von Hypothesen mithilfe der Binomialverteilung
ein- und zweiseitiger Test
Fehler 1. und 2. Art
- Normalverteilung
Dichtefunktion
Erwartungswert, Standardabweichung
Glockenkurve
- nicht: allgemeine stetige Zufallsgröße

Erwartete Kompetenzen im Bereich der Gleichungslehre

0. Grundtechniken

- Faktorisierung durch Ausklammern
- Anwendung einer binomischen Formel „rückwärts“
- Substitution
- Einsetzungsverfahren
- Fallunterscheidung in einfachen Fällen (z. B. bei Gleichungen mit Parametern, Betragsgleichungen)

1. Lineare Gleichungen

Beispiel

1.1 $ax = x + 3$

1.2 $tx = 3t$

2. Quadratische Gleichungen

Beispiele

2.1 $\frac{5}{2}x^2 - 4x = 2$

2.2 $2x^2 = 1,8x - 0,4$

2.3 $x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} = 0$

2.4 $9x^2 - 3ux + 1 = 0$

3. Potenzgleichungen

- Lösen von Potenzgleichungen mit natürlichen Exponenten
- bei negativen Exponenten: siehe 6.4

Beispiele

3.1 $4x^3 + 35 = 21$

3.2 $(1-x)^{12} = 0,05$

4. Exponentialgleichungen

- Lösen von Exponentialgleichungen mit beliebiger Basis

Beispiele

4.1 $4 \cdot e^{-x} = 1$

4.2 $2 \cdot 3^x = 8$

4.3 $2 \cdot e^{2x+1} = 3$

5. Wurzelgleichungen

- Lösen von Wurzelgleichungen durch Quadrieren, ggf. nach Isolieren des Wurzelterms
- Überprüfung der ermittelten Lösung
- nicht: Mehrfaches Quadrieren (bei mehreren Wurzeltermen)
- nicht: Optimierung bei Wurzelfunktionen mit Mitteln der Differentialrechnung

Beispiele

$$5.1 \quad \sqrt{x^2 + x^4} = \sqrt{20}$$

$$5.2 \quad \sqrt{(x-2)^2 + 9 + (2x)^2} = \sqrt{13}$$

$$5.3 \quad \sqrt{3x-5} + 4 = 2x$$

6. Bruchgleichungen

- Lösen von Bruchgleichungen, die mit elementarem Bruchverständnis lösbar sind
- Lösen von Bruchgleichungen, die durch einmalige Multiplikation mit x^n oder einem Linearfaktor auflösbar sind
- Überprüfung einer ermittelten Lösung

Beispiele

$$6.1 \quad \frac{x}{x+2} = \frac{2}{3}$$

$$6.2 \quad \frac{5}{x^2} - \frac{2}{x} = 3$$

$$6.3 \quad 2x - 7 = \frac{1}{x-3}$$

$$6.4 \quad x^{-4} = 81$$

$$6.5 \quad \frac{2x}{\sqrt{15x^2 + 4}} = \frac{1}{2}$$

7. Trigonometrische Gleichungen

- Bestimmung der Lösungen trigonometrischer Gleichungen in einem vorgegebenen Intervall bzw. **(neu)** in einfachen Fällen auf ganz \mathbb{R} .

Beispiele

$$7.1 \quad \sin(3x) = -1 ; \quad x \in \mathbb{R} \quad \textbf{(neu)}$$

$$7.2 \quad \cos(2x) = -0,8 ; \quad 0 \leq x \leq 2\pi \quad \text{(mit WTR)}$$

8. Betragsgleichungen

- Lösen einfacher Betragsgleichungen (nur ein Betrag) durch Fallunterscheidung

Beispiel

$$8.1 \quad \frac{|24 - x|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

9. Ungleichungen

- Lösen von Ungleichungen, die über die entsprechende Gleichung und anschließende funktionale Betrachtung gelöst werden können
- nicht: Auflösung einer Ungleichung durch Äquivalenzumformungen

Beispiele

$$9.1 \quad 2x - 5 > 1$$

$$9.2 \quad -x^2 + 3x + 7 > 3$$

$$9.3 \quad (x + 3)(x - 1) > 0$$

$$9.4 \quad (2x - 1) \cdot e^{-2x} < 0$$

$$9.5 \quad 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^x > 0,9$$

$$9.6 \quad |24 - x| < 10$$

10. Lineare Gleichungssysteme

- Lösen eines LGS, auch mit Parameter auf der rechten Seite

Beispiele

$$10.1 \quad \begin{array}{rclcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 14 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 7 \\ x_1 & - & 5x_2 & - & 4x_3 & = & -21 \end{array}$$

$$10.2 \quad \begin{array}{rclcl} 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 2r \\ 5x_1 & - & 4x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 2r + 6 \end{array}$$

Neben den in bisherigen Abituraufgaben verwendeten mathematischen Schreibweisen werden im Zuge der Übernahme von IQB-Aufgaben sowie der Einführung des IQB-Formeldokuments auch die folgenden Notationen innerhalb der schriftlichen Abiturprüfung verwendet und daher bei den Schülerinnen und Schülern als bekannt vorausgesetzt:

Notation	Erklärung
$\mathbb{R}^+, \mathbb{R}_0^+, \mathbb{R} \setminus \{2\}$	Mengen reeller Zahlen
$[a;b],]a;b],]-\infty;b]$	Intervalle reeller Zahlen
$\sum_{i=1}^n x_i$	Summationszeichen
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ $f(x) \rightarrow +\infty$ für $x \rightarrow -\infty$ $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$	Limes-Schreibweisen
λ, μ	griechische Parameter (bei Geraden-, Ebenengleichungen)
$\vec{u} \circ \vec{v}$	Skalarprodukt
\overline{AB}	Strecke
$ \overline{AB} $	Länge einer Strecke
$(2 -3), (2 -3 1)$	alternative Notation für einen Punkt im zwei- bzw. dreidimensionalen Koordinatensystem ohne Bezeichner
$\overline{A \cup B}, \overline{A \cap B}$	Verknüpfungen von Ereignissen (Negation, Vereinigung, Schnitt)
$P_A(B)$	bedingte Wahrscheinlichkeit
$P_p^n(X=k), P_p^n(k_1 \leq X \leq k_2)$	Wahrscheinlichkeit bei binomialverteilter Zufallsgröße X mit den Parametern p und n

Anforderungen an Schülerlösungen und deren Dokumentation

Von den Schülerinnen und Schülern wird eine saubere und nachvollziehbare Dokumentation erwartet, dazu gehören insbesondere:

- durch Verbalisierung des Vorgehens und Ergebnissätze strukturierte Darstellung
- angemessener sprachlicher Ausdruck, insbesondere korrekte Fachsprache
- Definition neu eingeführter Bezeichnungen
- keine Angaben über Tastenfolgen von WTR-Eingaben

Operatoren

Die Bedeutung der bei Arbeitsaufträgen verwendeten Operatoren entspricht in den meisten Fällen (z. B. bei *deuten*, *interpretieren*, *erläutern*) dem allgemein üblichen Sprachgebrauch. Die folgenden Hinweise beschreiben bei typischen und häufig vorkommenden Operatoren Umfang und Qualität der erwarteten Lösung.

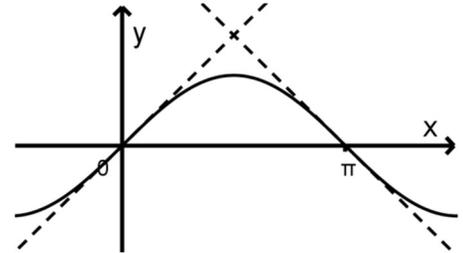
Operator	Hinweise
<i>angeben</i> <i>nennen</i> <i>darstellen</i>	<ul style="list-style-type: none">• kein Ansatz, keine Begründung, kein Lösungsweg
<i>beschreiben</i>	<ul style="list-style-type: none">• sprachlich (auch fachsprachlich) angemessene Formulierungen• keine Begründung
<i>begründen</i> <i>nachweisen</i> <i>zeigen</i>	<ul style="list-style-type: none">• logisches Schließen bzw. Argumentieren
<i>beurteilen</i>	<ul style="list-style-type: none">• mit Begründung
<i>berechnen</i>	<ul style="list-style-type: none">• mathematischer Ansatz• nachvollziehbar dokumentierter rechnerischer Lösungsweg
<i>bestimmen</i> <i>ermitteln</i> <i>untersuchen</i>	<ul style="list-style-type: none">• Art des Vorgehens frei wählbar (grafisch, rechnerisch), sofern nicht anders angegeben• nachvollziehbarer dokumentierter Lösungsweg
<i>grafisch darstellen</i> <i>zeichnen</i>	<ul style="list-style-type: none">• möglichst genaue Darstellung
<i>skizzieren</i>	<ul style="list-style-type: none">• bei Koordinatensystemen: beschriftete und skalierte Achsen• Reduktion auf charakteristische Eigenschaften

Wird in einer Aufgabenstellung ein „exakter Wert“ gefordert, dann ist damit ein mathematisch exakter Ausdruck (z. B. $\frac{5}{7}$, $\ln 2$, $\frac{\pi}{4}$) gemeint, nicht eine gerundete Dezimalzahl.

Pflichtaufgaben

Bearbeiten Sie **alle** Aufgaben P1 bis P4.

- P1** Gegeben ist die in \mathbb{R} definierte Funktion f mit $f(x) = \sin x$. Die Abbildung zeigt den Graphen G_f von f sowie die Tangenten an G_f in den dargestellten Schnittpunkten mit der x -Achse.



- a** Zeigen Sie, dass diejenige der beiden Tangenten, die durch den Koordinatenursprung verläuft, die Steigung 1 hat. (1 BE)
- b** Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das von G_f und den beiden Tangenten eingeschlossen wird. (4 BE)
- P2** Die Verbreitung eines Computervirus lässt sich modellhaft mithilfe der in \mathbb{R} definierten Funktion f mit $f(t) = 2 \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{100}t}$ beschreiben. Dabei ist t die Zeit in Tagen, die seit der ersten Infizierung eines Computers mit dem Virus vergangen ist, und $f(t)$ die Rate der Infizierungen zum Zeitpunkt t in der Einheit „Eintausend Computer pro Tag“.
- a** Zeigen Sie, dass $2 \cdot \left(1 - \frac{1}{100}t\right) \cdot e^{-\frac{1}{100}t}$ ein Term der ersten Ableitungsfunktion von f ist. (2 BE)
- b** Geben Sie den Zeitpunkt an, zu dem die Rate der Infizierungen am größten ist. (1 BE)
- c** Betrachtet wird der Zeitraum der zweiten Woche nach der ersten Infizierung eines Computers mit dem Virus. Geben Sie einen Term an, mit dem die Anzahl der Computer berechnet werden kann, die in diesem Zeitraum infiziert werden. (2 BE)
- P3** Gegeben sind der Punkt $P(-1|7|2)$ und die Ebene $E: x_1 + 3x_2 = 0$.
- a** Zeigen Sie, dass P nicht in E liegt. (1 BE)
- b** Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts, der entsteht, wenn P an E gespiegelt wird. (4 BE)

P4 Die Vierfeldertafel gehört zu einem Zufallsexperiment mit Ereignissen A und B. Für die Wahrscheinlichkeit p gilt $p \neq 0$.

	B	\bar{B}	
A	p		$3p$
\bar{A}			$1-3p$
	$4p$		

- a** Vervollständigen Sie die Vierfeldertafel. Zeigen Sie, dass p nicht den Wert $\frac{1}{5}$ haben kann. (3 BE)
- b** Für einen bestimmten Wert von p sind A und B stochastisch unabhängig. Ermitteln Sie diesen Wert von p . (2 BE)

Wahlaufgaben

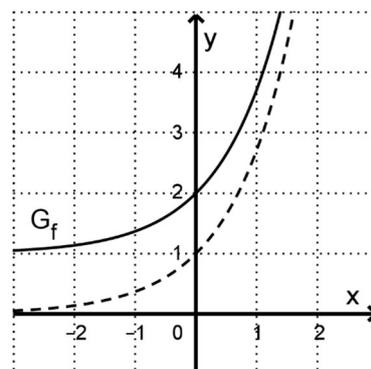
Bearbeiten Sie zwei der Aufgaben W1 bis W6.

W1 Gegeben sind die in \mathbb{R} definierten Funktionen f und g . Der Graph von f ist symmetrisch bezüglich der y -Achse, der Graph von g ist symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs. Beide Graphen haben einen Hochpunkt im Punkt $(2 | 1)$.

- a** Geben Sie für die Graphen von f und g jeweils die Koordinaten und die Art eines weiteren Extrempunkts an. (2 BE)
- b** Untersuchen Sie die in \mathbb{R} definierte Funktion h mit $h(x) = f(x) \cdot (g(x))^3$ im Hinblick auf eine mögliche Symmetrie ihres Graphen. (3 BE)

W2 Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer in \mathbb{R} definierten Funktion f sowie den Graphen der ersten Ableitungsfunktion von f .

- a** Geben Sie die Steigung der Tangente an G_f im Punkt $(0 | f(0))$ an.



(1 BE)

- b** Betrachtet wird die Schar der Funktionen g_c mit $c \in \mathbb{R}^+$. Der Graph von g_c geht aus G_f durch Streckung mit dem Faktor c in y -Richtung hervor. Die Tangente an den Graphen von g_c im Punkt $(0 | g_c(0))$ schneidet die x -Achse. Bestimmen Sie rechnerisch die x -Koordinate des Schnittpunkts. (4 BE)

- W3 a** Die Ebene $E: 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6$ enthält einen Punkt, dessen drei Koordinaten übereinstimmen. Bestimmen Sie diese Koordinaten. (2 BE)

- b** Begründen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist:
Es gibt unendlich viele Ebenen, die keinen Punkt enthalten, dessen drei Koordinaten übereinstimmen. (3 BE)

- W4** Gegeben sind die Punkte $A(0 | 0 | 0)$, $B(3 | 4 | 1)$, $C(1 | 7 | 3)$ und $D(-2 | 3 | 2)$.

- a** Weisen Sie nach, dass das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ist. (1 BE)

- b** Der Punkt T liegt auf der Strecke \overline{AC} . Das Dreieck ABT hat bei B einen rechten Winkel. Ermitteln Sie das Verhältnis der Länge der Strecke \overline{AT} zur Länge der Strecke \overline{CT} . (4 BE)

- W5** In einem Behälter befinden sich Kugeln, von denen jede dritte gelb ist.

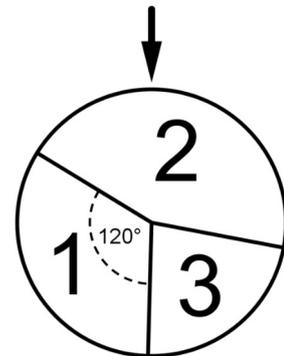
- a** Aus dem Behälter wird zweimal nacheinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Kugeln gelb sind. (1 BE)

- b** Im Behälter werden zwei gelbe Kugeln durch zwei blaue Kugeln ersetzt. Anschließend wird aus dem Behälter erneut zweimal nacheinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Kugeln gelb sind, beträgt nun $\frac{1}{16}$. Ermitteln Sie, wie viele gelbe Kugeln sich nach den beschriebenen Vorgängen im Behälter befinden. (4 BE)

W6 Für ein Spiel wird ein Glücksrad verwendet. Die Abbildung zeigt dieses Glücksrad schematisch. Die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einmaligem Drehen die Zahl 2 zu erzielen, wird mit p bezeichnet.

Bei dem Spiel bezahlt jeder Spieler zunächst einen Einsatz von 1 Euro. Anschließend dreht er das Glücksrad zweimal. Erzielt er dabei zwei Zahlen, deren Summe mindestens 5 ist, wird ihm der Wert der Summe als Betrag in Euro ausgezahlt; ansonsten erfolgt keine Auszahlung. Wird das Spiel wiederholt durchgeführt, so ist zu erwarten, dass sich auf lange Sicht die Einsätze der Spieler und die Auszahlungen ausgleichen.

Leiten Sie unter Verwendung der beschriebenen Spielregeln eine Gleichung her, mit der der Wert von p berechnet werden könnte; erläutern Sie dabei Ihr Vorgehen.



(5 BE)

Die Abbildung 1 zeigt modellhaft den Längsschnitt einer dreiteiligen Brücke aus Holz für eine Spielzeugeisenbahn. Die Züge können sowohl über die Brücke fahren als auch darunter hindurch.

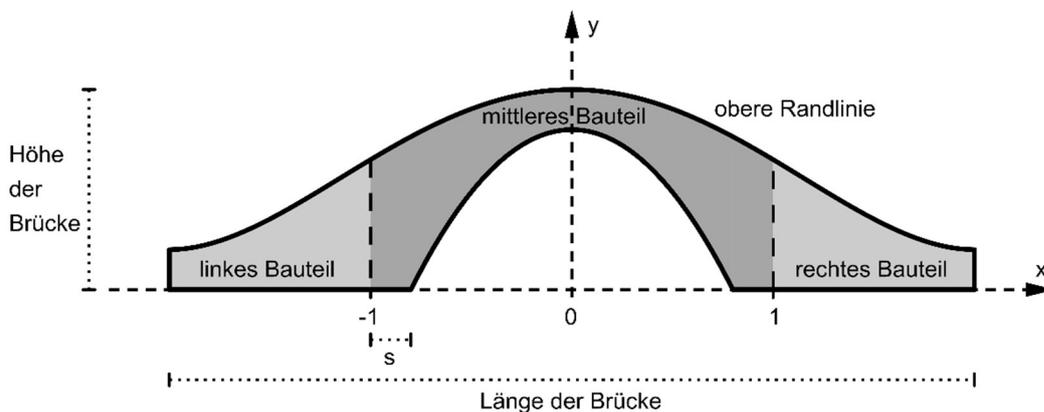


Abb. 1

Die obere Randlinie des Längsschnitts der Brücke kann mithilfe des Graphen der in \mathbb{R} definierten Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{20}x^4 - \frac{2}{5}x^2 + 1$ beschrieben werden. Dabei werden die Endpunkte dieser Randlinie durch die beiden Tiefpunkte des Graphen von f dargestellt. Im verwendeten Koordinatensystem beschreibt die x -Achse die Horizontale; eine Längeneinheit entspricht einem Dezimeter in der Realität.

- 1 a Zeigen Sie rechnerisch, dass die obere Randlinie achsensymmetrisch ist. (2 BE)
- b Bestimmen Sie rechnerisch die Höhe und die Länge der Brücke. (5 BE)
(zur Kontrolle: Ein Tiefpunkt des Graphen von f hat die x -Koordinate 2.)
- c Betrachtet wird derjenige Punkt der oberen Randlinie, der sich am Übergang vom mittleren zum rechten Bauteil befindet. Prüfen Sie, ob dieser Punkt auf halber Höhe zwischen dem höchsten Punkt der oberen Randlinie und deren rechtem Endpunkt liegt. (3 BE)
- d Geben Sie die Bedeutung des Terms $\frac{f(2)-f(1)}{2-1}$ im Sachzusammenhang an und berechnen Sie seinen Wert. (2 BE)
- e Berechnen Sie die Größe des größten Steigungswinkels der Brücke, der beim Überfahren zu überwinden ist. (5 BE)

Der parabelförmige Teil der unteren Randlinie des Längsschnitts der Brücke kann mithilfe des Graphen einer in \mathbb{R} definierten Funktion q mit $q(x) = 0,8 - a \cdot x^2$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ beschrieben werden.

- f** In der Abbildung 1 ist die Länge einer der beiden Bodenflächen des mittleren Bauteils mit s bezeichnet. Bestimmen Sie alle Werte von a , die für diese Länge mindestens $0,1$ dm liefern. (4 BE)
- g** Begründen Sie im Sachzusammenhang, dass für die Beschreibung der unteren Randlinie beliebig große Werte von a nicht infrage kommen. (2 BE)
- h** Für die Brücke gilt $a = 1,25$. Die drei Bauteile der Brücke werden aus massivem Holz hergestellt; 1 dm^3 des Holzes hat eine Masse von 800 Gramm. Die Brücke ist $0,4$ dm breit. Ermitteln Sie die Masse des mittleren Bauteils. (7 BE)

- 2** Während der Planung der Brückenform kamen zur Beschreibung der oberen Randlinie für das linke Bauteil eine Funktion g_ℓ und für das rechte Bauteil eine Funktion g_r infrage. Auch bei Verwendung dieser Funktionen wäre die obere Randlinie achsensymmetrisch gewesen. Beurteilen Sie jede der folgenden Aussagen:

I $-g_\ell(x) = g_r(-x)$ für $-2 \leq x \leq -1$ II $g_\ell(x-1) = g_r(-x+1)$ für $-1 \leq x \leq 0$ (4 BE)

- 3** Die Form und die Größe der Brücke werden verändert, indem im bisher verwendeten Modell die obere Randlinie des Längsschnitts mithilfe der in \mathbb{R} definierten Funktion k mit $k(x) = \frac{3}{5} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) + \frac{4}{5}$ beschrieben wird. Die Bauteile der veränderten Brücke lassen sich nach dem in der Abbildung 2 dargestellten Prinzip aus einem quaderförmigen Holzblock sägen. Der beim Sägen auftretende Materialverlust soll im Folgenden vernachlässigt werden.

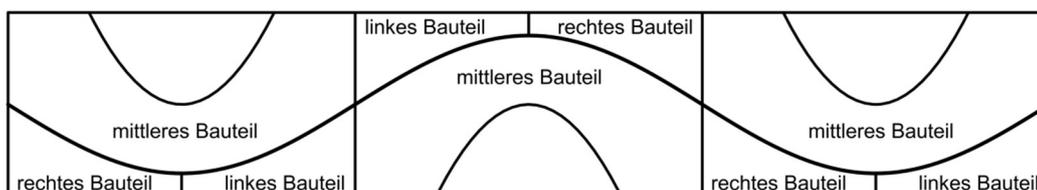


Abb. 2

- a** Der Graph von k ist symmetrisch bezüglich jedes seiner Wendepunkte. Beschreiben Sie, wie diese Eigenschaft mit dem in der Abbildung 2 dargestellten Prinzip zusammenhängt. (2 BE)
- b** Ermitteln Sie mithilfe des Funktionsterms von k den Flächeninhalt der gesamten in der Abbildung 2 gezeigten rechteckigen Vorderseite des Holzblocks. (4 BE)

Gegeben ist die in \mathbb{R} definierte Funktion f mit $f(x) = e^x$.

- a** Bestimmen Sie rechnerisch eine Gleichung der Tangente an den Graphen von f in dessen Schnittpunkt mit der y -Achse. Geben Sie eine Gleichung der Gerade an, die in diesem Punkt senkrecht zur Tangente steht, sowie den Inhalt der Fläche, die von dieser Gerade, der Tangente und der x -Achse eingeschlossen wird. (4 BE)
- b** Geben Sie alle Werte von $m \in \mathbb{R}$ an, für die die Gerade mit der Gleichung $y = m \cdot x + 1$ mit dem Graphen von f genau einen Punkt gemeinsam hat. (3 BE)
- c** Der Graph von f , die Koordinatenachsen und die Gerade mit der Gleichung $x = a$ mit $a > 0$ begrenzen ein Flächenstück. Rotiert dieses Flächenstück um die x -Achse, so erzeugt es einen Körper mit dem Volumen 3π . Bestimmen Sie den Wert von a . (5 BE)

Gegeben sind außerdem die in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definierte Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{x}$ sowie die Funktion h mit $h(x) = \frac{1}{x-2} + 4$, deren Definitionsmenge so groß wie möglich gewählt wurde.

- d** Beschreiben Sie, wie der Graph von h aus dem Graphen von g erzeugt werden kann. Geben Sie die Definitionsmenge von h sowie den Grenzwert von h für $x \rightarrow +\infty$ an. (4 BE)
- e** Die Abbildung in der Anlage soll den Graphen von h sowie die Gerade w mit der Gleichung $y = x$ darstellen. Ergänzen Sie die fehlenden Koordinatenachsen und skalieren Sie diese passend. (3 BE)
- f** Für jede Stammfunktion H von h gilt für jede reelle Zahl $b > 5$: $H(b) - H(5) > 4 \cdot (b - 5)$. Beschreiben Sie die geometrische Bedeutung dieser Aussage und veranschaulichen Sie die Aussage grafisch. (4 BE)

Die Umkehrfunktion von h wird mit k bezeichnet.

- g** Alle gemeinsamen Punkte der Graphen von h und k liegen auf der Gerade w . Berechnen Sie die x -Koordinaten dieser gemeinsamen Punkte. (5 BE)
- h** Begründen Sie ohne zu rechnen, dass jede Tangente mit der Steigung -1 an den Graphen von h auch Tangente an den Graphen von k ist. (3 BE)

Betrachtet werden nun die in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definierte Funktion u mit $u(x) = f(g(x))$ sowie die in \mathbb{R} definierte Funktion $v(x) = g(f(x))$. Für die erste Ableitungsfunktion u' von u gilt $u'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}$.

- i Geben Sie für jede der Funktionen u und v einen Funktionsterm an, der zwar die Variable x , aber keine Funktionsbezeichnung wie „ f “ oder „ g “ enthält. Nennen Sie die Wertemengen von u und v . (4 BE)
- j Zeigen Sie, dass u genau eine Wendestelle hat, und bestimmen Sie diese Wendestelle. (5 BE)
-

Zu- und Vorname: _____

Chiffre der Schule

Chiffre des Schülers

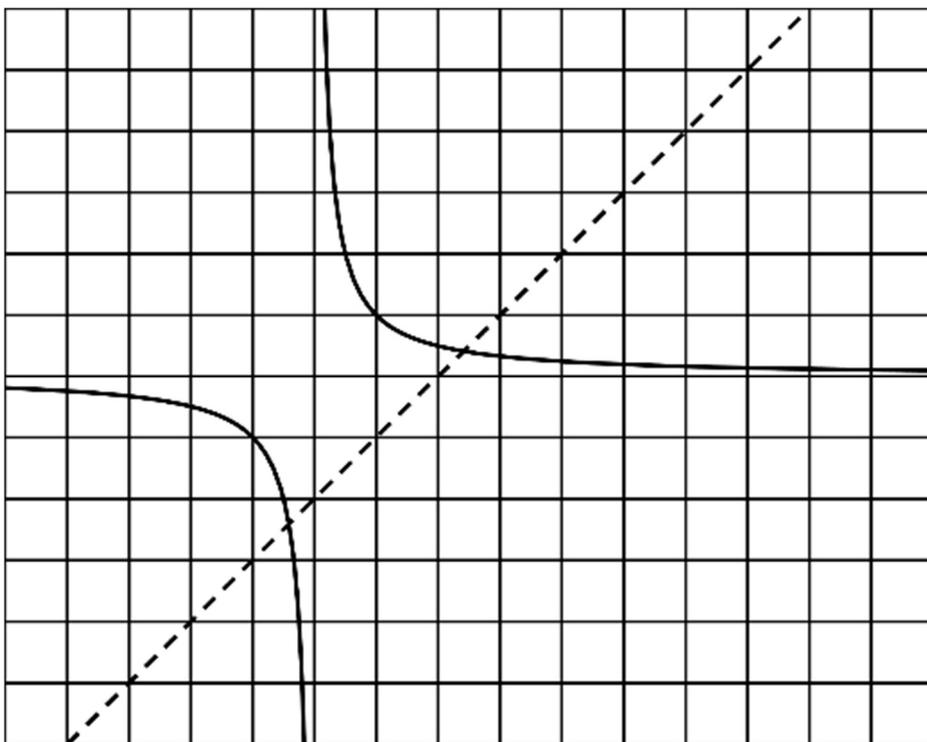


Prüfungsfach: Mathematik (Beispielaufgabe 2024)

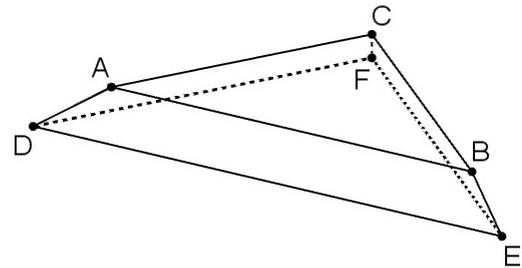
Chiffre der Schule

Chiffre des Schülers

Abbildung zu Teilaufgabe e



In einem Koordinatensystem wird der abgebildete Körper ABCDEF mit $A(0|10|1)$, $B(10|20|1)$, $C(0|20|1)$, $D(0|7|0)$ und $F(0|20|0)$ betrachtet. Die beiden Seitenflächen ACFD und BEFC stehen senkrecht zur x_1x_2 -Ebene.



- 1 a A, B und D liegen in der Ebene H. Bestimmen Sie eine Gleichung von H in Koordinatenform.
(zur Kontrolle: $x_1 - x_2 + 3x_3 + 7 = 0$) (4 BE)

- b Begründen Sie, dass die Gerade $i: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ sowohl in der x_1x_2 -Ebene als auch in der Ebene H liegt. (2 BE)

Der Punkt E liegt auf i, wobei der Abstand von E zu F ebenso groß ist wie der Abstand von D zu F.

- c Ermitteln Sie die Koordinaten von E. (5 BE)
- d Begründen Sie ohne zu rechnen, dass die Vierecke ACFD und BEFC den gleichen Flächeninhalt haben. (3 BE)
- 2 Der Körper ABCDEF stellt modellhaft ein Podest dar, das auf der Bühne eines Theaters steht, das Viereck ADEB die Vorderseite des Podests und der Punkt D deren untere linke Ecke. Die x_1x_2 -Ebene beschreibt den horizontalen Boden der Bühne. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

- a Zeigen Sie, dass die Deckfläche des Podests rechtwinklig ist, und berechnen Sie deren Flächeninhalt. (3 BE)
- b Die Position eines Scheinwerfers kann im Modell durch den Punkt $S(5|-3|z)$ dargestellt werden. Vom Scheinwerfer ausgehendes Licht trifft an der unteren linken Ecke der Vorderseite des Podests unter einem Winkel der Größe 47° auf den Boden auf. Ermitteln Sie die Höhe des Scheinwerfers über dem Boden der Bühne. (4 BE)

- c Die Position eines zweiten Scheinwerfers lässt sich im Modell durch den Punkt $P(2 | 4 | 8)$ beschreiben. Die Gerade mit der Gleichung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \mu \in \mathbb{R} \text{ schneidet die Ebene mit der Gleichung}$$

$$\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \text{ im Punkt } Q(-2 | 8 | 1). \text{ Es gilt } |\overline{PQ}| = 9.$$

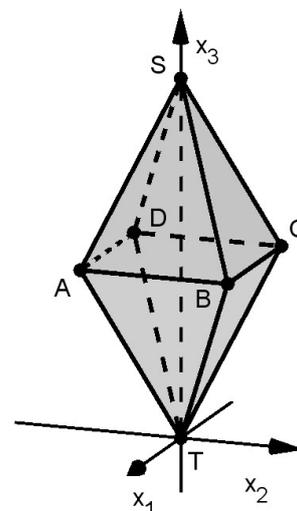
Treffen Sie auf der Grundlage dieser Informationen eine Aussage über den Abstand des zweiten Scheinwerfers von der Vorderkante der Deckfläche des Podests. Begründen Sie Ihre Aussage ohne zu rechnen.

(4 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(5 | -5 | 12)$, $B(5 | 5 | 12)$ und $C(-5 | 5 | 12)$.

- a** Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenkelig ist. (2 BE)
- b** Begründen Sie, dass A, B und C Eckpunkte eines Quadrats sein können, und geben Sie die Koordinaten des vierten Eckpunkts D dieses Quadrats an. (3 BE)

Im Folgenden wird die abgebildete Doppelpyramide betrachtet. Die beiden Teilpyramiden ABCDS und ABCDT sind gleich hoch. Der Punkt T liegt im Koordinatenursprung, der Punkt S ebenfalls auf der x_3 -Achse.



Die Seitenfläche BCT liegt in einer Ebene E.

- c** Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. (zur Kontrolle: $12x_2 - 5x_3 = 0$) (3 BE)
- d** Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den die Seitenfläche BCT mit der Fläche ABCD einschließt. (3 BE)

E gehört zur Schar der Ebenen $E_k : kx_2 - 5x_3 = 5k - 60$ mit $k \in \mathbb{R}$.

- e** Alle Ebenen der Schar schneiden sich in einer Gerade. Weisen Sie nach, dass die Kante \overline{BC} auf dieser Gerade liegt. (2 BE)
- f** Ermitteln Sie diejenigen Werte von k, für die E_k mit der Seitenfläche ADS mindestens einen Punkt gemeinsam hat. (4 BE)
- g** Die Seitenfläche ADT liegt in der Ebene F. Geben Sie einen Normalenvektor von F an und begründen Sie Ihre Angabe, ohne die Koordinaten von A und D zu verwenden. Bestimmen Sie denjenigen Wert von k, für den E_k senkrecht zu F steht. (4 BE)
- h** Die Doppelpyramide wird so um die x_1 -Achse gedreht, dass die bisher mit BCT bezeichnete Seitenfläche in der x_1x_2 -Ebene liegt und der bisher mit S bezeichnete Punkt eine positive x_2 -Koordinate hat. Bestimmen Sie diese x_2 -Koordinate und veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen durch eine Skizze. (4 BE)

Ein Unternehmen produziert Stahlkugeln für Kugellager. Erfahrungsgemäß sind 4 % aller Kugeln fehlerhaft.

800 Kugeln werden zufällig ausgewählt. Die Anzahl der fehlerhaften Kugeln unter den ausgewählten kann durch eine binomialverteilte Zufallsgröße beschrieben werden.

- a** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den ausgewählten Kugeln weniger als 30 fehlerhaft sind. (2 BE)
- b** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der fehlerhaften Kugeln unter den ausgewählten höchstens um eine halbe Standardabweichung vom Erwartungswert dieser Anzahl abweicht. (5 BE)

Eine fehlerhafte Kugel hat entweder einen Formfehler oder einen Größenfehler. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Kugel einen Formfehler hat, beträgt 3 %. Alle Kugeln werden vor dem Verpacken geprüft. Dabei werden 95 % der Kugeln mit Formfehler, 98 % der Kugeln mit Größenfehler, aber auch 0,5 % der Kugeln ohne Fehler aussortiert.

- c** Stellen Sie den Sachzusammenhang in einem beschrifteten Baumdiagramm dar. (4 BE)
- d** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine aussortierte Kugel keinen Formfehler hat. (3 BE)

Aufgrund zunehmender Reklamationen wird vermutet, dass der Anteil der fehlerhaften Kugeln auf über 4 % angestiegen ist. Um diese Vermutung zu prüfen, soll die Nullhypothese „Der Anteil der fehlerhaften Kugeln beträgt höchstens 4 %.“ auf der Grundlage einer Stichprobe von 500 Kugeln getestet werden. Wenn das Ergebnis des Tests die Vermutung nicht entkräftet, soll die Produktion unterbrochen werden, um die Maschinen zu warten. Das Risiko, die Produktion irrtümlich zu unterbrechen, soll höchstens 3 % betragen.

- e** Beschreiben Sie für diesen Test im Sachzusammenhang den Fehler zweiter Art. Geben Sie die Konsequenz an, die sich aus diesem Fehler für die Produktion ergeben würde. (3 BE)
- f** Für den beschriebenen Test wird der Ablehnungsbereich betrachtet. Eine der beiden Grenzen dieses Ablehnungsbereichs ist größer als 0 und kleiner als 500; diese Grenze wird mit k bezeichnet. Zur Bestimmung des Werts von k soll die binomial- (4 BE)
-

verteilte Zufallsgröße Y mit den Parametern $n = 500$ und $p = 0,04$ verwendet werden. Begründen Sie, dass keine der beiden Ungleichungen I und II den korrekten Wert von k liefert.

I $P(Y \leq k) \leq 0,03$

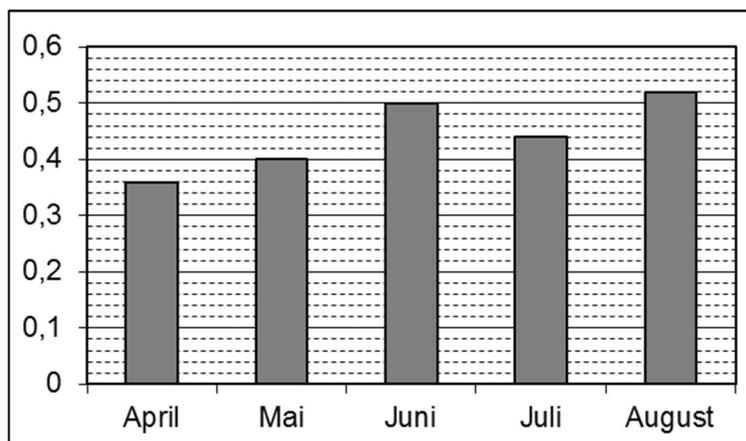
II $P(Y \leq k) > 0,97$

- g** Die Kugeln werden in Packungen verkauft. Ein Teil der verkauften Packungen wird zurückgegeben. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine verkaufte Packung zurückgegeben wird, beträgt 3 %. Dem Unternehmen entsteht pro Packung, die zurückgegeben wird, ein Verlust von 5,80 Euro; pro Packung, die nicht zurückgegeben wird, erzielt das Unternehmen einen Gewinn von 8,30 Euro. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der das Unternehmen bei einem Verkauf von 200 Packungen einen Gesamtgewinn von mindestens 1500 Euro erzielt.

(4 BE)

- 1 Ein Fahrradhändler hat festgestellt, dass es sich bei 40 % aller von ihm verkauften Fahrräder um Mountainbikes handelt. Es soll davon ausgegangen werden, dass in einer zufälligen Auswahl verkaufter Fahrräder die Anzahl der Mountainbikes binomialverteilt ist.
- a Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich in einer zufälligen Auswahl von 100 verkauften Fahrrädern genau 30 Mountainbikes befinden. (1 BE)
- b Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Zufallsexperiment, bei dem die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit dem Term $1 - 0,6^{10} - 10 \cdot 0,4 \cdot 0,6^9$ berechnet werden kann. Geben Sie dieses Ereignis an. (3 BE)
- c Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer zufälligen Auswahl von 250 verkauften Fahrrädern die Anzahl der Mountainbikes um mindestens 10 % größer ist als der Erwartungswert für diese Anzahl. (3 BE)
- d 20 % aller verkauften Fahrräder haben einen Rahmen aus Aluminium. 45 % aller verkauften Fahrräder sind weder Mountainbikes noch haben sie einen Rahmen aus Aluminium. Bestimmen Sie den Anteil der Fahrräder mit einem Rahmen aus Aluminium unter den verkauften Mountainbikes. (4 BE)
- e Der Händler hat berechnet, dass er im September des Jahres 2020 mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 96 % mehr als 800 Mountainbikes verkaufen wird. Ermitteln Sie, von welcher Anzahl verkaufter Fahrräder er bei seiner Berechnung mindestens ausgegangen ist. (4 BE)

Die Abbildung zeigt für einige Monate des Jahres 2019 jeweils den Anteil der Mountainbikes unter allen verkauften Fahrrädern.



- f** Im April wurden 810 Mountainbikes verkauft. Bestimmen Sie für diesen Monat die Anzahl aller verkauften Fahrräder. (2 BE)
- g** Der Anteil der Mountainbikes lag im Mai und Juni insgesamt bei 46 %; im Juli war er größer als im Mai und im August größer als im Juni. Entscheiden Sie, ob es dennoch möglich ist, dass der Anteil der Mountainbikes im Juli und August insgesamt kleiner war als insgesamt im Mai und Juni. Begründen Sie Ihre Entscheidung. (3 BE)

2 Zucker wird in unterschiedlich großen Packungen angeboten. Es soll davon ausgegangen werden, dass für jede Packungsgröße die tatsächliche Masse des Zuckers durch eine normalverteilte Zufallsgröße beschrieben werden kann.

- a** Für eine bestimmte Packungsgröße ist $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{200\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-500)^2}{200}}$ der Term der zugehörigen Dichtefunktion, wobei x die Masse des Zuckers in Gramm ist. Geben Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung für die Masse jeweils in Gramm an. (2 BE)
- b** Bei einer anderen Packungsgröße beträgt der Erwartungswert für die Masse des Zuckers 250 g, die Standardabweichung 5 g. Bestimmen Sie – auf 1 g genau – das kleinste Intervall, das mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 98 % die tatsächliche Masse des Zuckers enthält und symmetrisch bezüglich des Erwartungswerts ist. (3 BE)

P1

a $f'(0) = \cos(0) = 1$ (1 BE)

b $2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - \sin x) dx = 2 \cdot \left[\frac{1}{2}x^2 + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4} - 2$ (4 BE)

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	1					I		1		
b	4		II		I	II		1	3	

P2

a $f'(t) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{100}t} + 2 \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{100}t} \cdot \left(-\frac{1}{100}\right) = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{100}t\right) \cdot e^{-\frac{1}{100}t}$ (2 BE)

b 100 Tage nach der ersten Infizierung eines Computers (1 BE)

c $1000 \cdot \int_7^{14} f(t) dt$ (2 BE)

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2					II		1	1	
b	1			I	I		I	1		
c	2			II		I	II		2	

P3

a $-1 + 3 \cdot 7 \neq 0$ (1 BE)

b Gleichung der Gerade g, die senkrecht zu E durch P verläuft: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Mit $-1 + \lambda + 3 \cdot (7 + 3\lambda) = 0 \Leftrightarrow 10\lambda = -20 \Leftrightarrow \lambda = -2$ ergibt sich für den Ortsvektor des

gesuchten Punkts $\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$. (4 BE)

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	1					I		1		
b	4	I	II			II		1	3	

P4

a		B	\bar{B}	
	A	p	2p	3p
	\bar{A}	3p	1-6p	1-3p
		4p	1-4p	1

Für $p = \frac{1}{5}$ gilt $1 - 6p < 0$. (3 BE)

b Für $p \neq 0$ gilt: $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B) \Leftrightarrow 3p \cdot 4p = p \Leftrightarrow 12p = 1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{12}$ (2 BE)

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	3		II		I	I		1	2	
b	2			II	I	I		1	1	

W1

a Der Graph von f hat den Hochpunkt $(-2 | 1)$, der Graph von g den Tiefpunkt $(-2 | -1)$. (2 BE)

b $h(-x) = f(-x) \cdot (g(-x))^3 = f(x) \cdot (-g(x))^3 = -f(x) \cdot (g(x))^3 = -h(x)$

Damit ist der Graph von h symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs. (3 BE)

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2	II	I				I	1	1	
b	3	III			II	III				3

W2

a Die Steigung ist 1. (1 BE)

b Tangente an den Graphen von $g_c: y = g'_c(0) \cdot x + g_c(0) = c \cdot f'(0) \cdot x + c \cdot f(0) = c \cdot x + 2c$
 $c \cdot x + 2c = 0 \Leftrightarrow x = -2$ (4 BE)

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	1				II	I			1	
b	4	III	III		I	II			1	3

W3

a Mit $x_1 = x_2 = x_3 = a$ ergibt sich: $3a + 2a + 2a = 6 \Leftrightarrow a = \frac{6}{7}$ (2 BE)

b Alle Punkte, deren drei Koordinaten übereinstimmen, liegen auf der Geraden mit der Gleichung $\vec{x} = b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $b \in \mathbb{R}$. Es gibt unendlich viele Ebenen, die parallel zu dieser Gerade sind und die Gerade nicht enthalten. (3 BE)

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2		II			II		1	1	
b	3	III	III							3

W4

a $\overline{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \overline{DC}$ (1 BE)

b T hat den Ortsvektor $\lambda \cdot \overline{AC}$.

$$\overline{AB} \circ \overline{TB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 - \lambda \\ 4 - 7\lambda \\ 1 - 3\lambda \end{pmatrix} = 9 - 3\lambda + 16 - 28\lambda + 1 - 3\lambda = 26 - 34\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{13}{17}$$

Damit beträgt das gesuchte Verhältnis 13 : 4. (4 BE)

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	1	I				I		1		
b	4		III			II	II		1	3

W5

a $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ (1 BE)

b Da die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Kugeln gelb sind, nach den beschriebenen Vorgängen $\frac{1}{16}$ beträgt, ist nun jede vierte Kugel gelb. Bezeichnet man die gesuchte Anzahl mit x , so ergibt sich $\frac{x+2}{4x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x + 6 = 4x \Leftrightarrow x = 6$. (4 BE)

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	1			I		I		1		
b	4	III	III			II	II		1	3

W6

Eine Auszahlung erfolgt nur dann, wenn der Spieler zweimal die Zahl 3 oder die Zahlen 2 und 3 erzielt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, zweimal die Zahl 3 zu erzielen, beträgt $\left(\frac{2}{3} - p\right)^2$, die Wahrscheinlichkeit dafür, die Zahlen 2 und 3 zu erzielen, $2 \cdot p \cdot \left(\frac{2}{3} - p\right)$.

Damit sich die Einsätze der Spieler und die Auszahlungen auf lange Sicht ausgleichen, muss der Erwartungswert für die Auszahlung bei einmaliger Durchführung des Spiels mit dem Einsatz übereinstimmen. Damit ergibt sich für die gesuchte Gleichung: $2 \cdot p \cdot \left(\frac{2}{3} - p\right) \cdot 5 + \left(\frac{2}{3} - p\right)^2 \cdot 6 = 1$ (5 BE)

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
	5	II	III	II	I	I	II		2	3

- 1 a** $f(-x) = \frac{1}{20} \cdot (-x)^4 - \frac{2}{5} \cdot (-x)^2 + 1 = \frac{1}{20} x^4 - \frac{2}{5} x^2 + 1 = f(x)$ (2 BE)
- b** $f(0) = 1$, d. h. die Höhe beträgt 1 dm.
 $f'(x) = \frac{1}{5} x^3 - \frac{4}{5} x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5} x \cdot (x^2 - 4) = 0$
 Daraus ergibt sich in Verbindung mit der Abbildung 1, dass die Tiefpunkte des Graphen von f die x -Koordinaten -2 und 2 haben. Die Brücke ist also 4 dm lang. (5 BE)
- c** $f(1) = \frac{13}{20} \neq \frac{3}{5} = \frac{1+0,2}{2} = \frac{f(0)+f(2)}{2}$, die beschriebene Bedingung ist also nicht erfüllt. (3 BE)
- d** Der Term gibt für das rechte Bauteil die mittlere Steigung der oberen Randlinie an.
 $\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{1}{5} - \frac{13}{20} = -\frac{9}{20}$ (2 BE)
- e** $f''(x) = \frac{3}{5} x^2 - \frac{4}{5} = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$
 $\tan \alpha = f'\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{16}{45} \sqrt{3}$ liefert $\alpha \approx 32^\circ$. (5 BE)
- f** $q(-0,9) = 0,8 - a \cdot (-0,9)^2 \leq 0 \Leftrightarrow a \geq \frac{80}{81}$ (4 BE)
- g** Je größer der Wert von a ist, desto schmaler ist der Graph von q und damit die Durchfahrt der Brücke. Wird der Wert von a zu groß, kann kein Zug mehr hindurchfahren. (2 BE)
- h** $q(x) = 0,8 - 1,25 \cdot x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{0,8}{1,25} \Leftrightarrow x = \pm 0,8$
 $2 \cdot \left(\int_0^1 f(x) dx - \int_0^{0,8} q(x) dx \right) = 2 \cdot \left(\left[\frac{1}{100} x^5 - \frac{2}{15} x^3 + x \right]_0^1 - \left[0,8x - \frac{5}{12} x^3 \right]_0^{0,8} \right)$
 $= 2 \cdot \left(\frac{1}{100} - \frac{2}{15} + 1 - \left(\frac{16}{25} - \frac{16}{75} \right) \right) = 0,9$
 Damit: $0,9 \text{ dm}^2 \cdot 0,4 \text{ dm} \cdot \frac{800 \text{ g}}{1 \text{ dm}^3} = 288 \text{ g}$ (7 BE)
- 2 I:** Diejenigen Teile der Graphen von g_ℓ und g_r , die im Längsschnitt die oberen Randlinien des linken bzw. rechten Bauteils darstellen, liegen nicht symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs. Damit ist die Aussage falsch.
- II:** Diejenigen Teile der Graphen von g_ℓ und g_r , die im Längsschnitt die oberen Randlinien des linken bzw. rechten Bauteils darstellen, liegen symmetrisch bezüglich der y -Achse. Also gilt $g_\ell(-1-x) = g_r(1+x)$ für $0 \leq x \leq 1$ und damit $g_\ell(-1+x) = g_r(1-x)$ für $-1 \leq x \leq 0$. Folglich ist die Aussage richtig. (4 BE)
- 3 a** Aufgrund der Symmetrie bezüglich der Wendepunkte haben die drei linken, die drei mittleren und die drei rechten Bauteile im Hinblick auf die obere Randlinie jeweils die gleiche Form. (2 BE)
- b** k hat die Periode 6. Damit ergibt sich für den Flächeninhalt in Quadratdezimetern $1,5 \cdot 6 \cdot 2 \cdot k(1,5) = 14,4$. (4 BE)

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	2	I		I		I		X		
b	5		I	I	I	I	I	X		
c	3			I		I	I	X		
d	2			II	I	I	II		X	
e	5		II	I		II			X	
f	4		III	II		II				X
g	2	II		I	I		II		X	
h	7		II	II		II	I		X	
2	4	II		II	III		II			X
3 a	2	II			II		II		X	
b	4	II	III	II	III	II	I			X

a $f'(x) = e^x$, $f'(0) = 1$, $f(0) = 1$

Gleichung der Tangente: $y = x + 1$

Gleichung der Gerade: $y = -x + 1$

Flächeninhalt: 1

(4 BE)

b $m < 0$, $m = 0$ und $m = 1$

(3 BE)

c $\pi \cdot \int_0^a f(x)^2 dx = \pi \cdot \int_0^a e^{2x} dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^a = \pi \cdot \left(\frac{1}{2} e^{2a} - \frac{1}{2} \right) = 3\pi \Leftrightarrow e^{2a} = 7 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \cdot \ln 7$

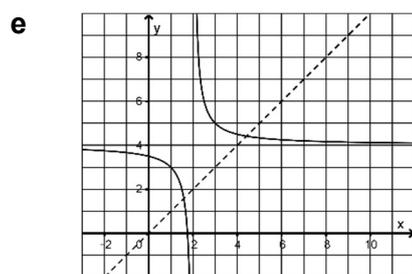
(5 BE)

d Der Graph von h kann aus dem Graphen von g durch eine Verschiebung um 2 in positive x -Richtung und eine Verschiebung um 4 in positive y -Richtung erzeugt werden.

Definitionsmenge: $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

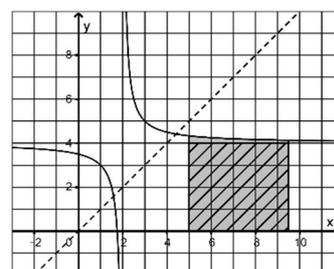
$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 4$

(4 BE)



(3 BE)

f Der Inhalt der Fläche, die der Graph von h mit der x -Achse und den Geraden mit den Gleichungen $x = 5$ und $x = b$ einschließt, ist größer als der Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen 4 und $b - 5$.



(4 BE)

g $h(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} = x - 4 \Leftrightarrow 1 = x^2 - 6x + 8 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = 3 - \sqrt{2} \vee x = 3 + \sqrt{2}$

(5 BE)

h Die Graphen von h und k liegen bezüglich w zueinander symmetrisch. Da jede Gerade mit der Steigung -1 symmetrisch bezüglich w ist, berührt sie, wenn sie den Graphen von h berührt, auch den Graphen von k .

(3 BE)

i $u(x) = e^{\frac{1}{x}}$, Wertemenge: $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$v(x) = \frac{1}{e^x}$, Wertemenge: \mathbb{R}^+

(4 BE)

j $u'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}$

$u''(x) = \frac{2}{x^3} \cdot e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot e^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right) \cdot e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^4} \cdot (2x + 1) \cdot e^{\frac{1}{x}} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

Wegen $u''(x) < 0$ für $x < -\frac{1}{2}$ und $u''(x) > 0$ für $x > -\frac{1}{2}$ hat u bei $x = -\frac{1}{2}$ eine Wendestelle. (5 BE)

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	4	I				I		X		
b	3	II	II		I				X	
c	5		I			II	I		X	
d	4	I			I		I	X		
e	3	II	I		II		I		X	
f	4	III			III		II			X
g	5					II			X	
h	3	III					II			X
i	4	II			II	I			X	
j	5	I	I			III				X

1 a Das aus $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $m, n \in \mathbb{R}$ resultierende Gleichungssystem

I $x_1 = 10m$

II $x_2 = 10 + 10m - 3n$

III $x_3 = 1 - n$

liefert $x_2 = 10 + x_1 + 3x_3 - 3 \Leftrightarrow x_1 - x_2 + 3x_3 + 7 = 0$. (4 BE)

b Für alle Punkte von i gilt $x_3 = 0$, d. h. i liegt in der x_1x_2 -Ebene. Wegen $\lambda - (7 + \lambda) + 7 = 0$ liegt i auch in H. (2 BE)

c Für $\lambda \neq 0$ gilt:

$$\left| \begin{pmatrix} \lambda \\ 7 + \lambda \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = |\overline{DF}| \Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2 + (\lambda - 13)^2} = 13 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda^2 - 26\lambda + 13^2 = 13^2$$

$$\Leftrightarrow 2\lambda^2 - 26\lambda = 0 \Leftrightarrow 2\lambda \cdot (\lambda - 13) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 13$$

Damit: $E(13 | 20 | 0)$ (5 BE)

d Grund- und Deckfläche des Körpers sind parallel zur x_1x_2 -Ebene, die beiden Vierecke stehen senkrecht dazu, sind also Trapeze mit gleicher Höhe. Da zudem die Punkte A, B, D und E in einer Ebene liegen, gilt wegen $|\overline{DF}| = |\overline{EF}|$ auch $|\overline{AC}| = |\overline{BC}|$. (3 BE)

2 a $\overline{CA} \circ \overline{CB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

$\frac{1}{2} \cdot |\overline{CA}| \cdot |\overline{CB}| = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 = 50$, d. h. der Flächeninhalt beträgt 50m^2 . (3 BE)

b $\tan 47^\circ = \frac{z}{\sqrt{125}} = \frac{z}{\sqrt{125}} \Leftrightarrow z = \tan 47^\circ \cdot \sqrt{125}$, d. h. die Höhe beträgt etwa 12 m. (4 BE)

c Der Abstand ist größer als 9 m.

Begründung: Q ist der Fußpunkt des Lots von P auf die Gerade durch A und B. Da $Q \notin \overline{AB}$, ist der Abstand von P zu \overline{AB} größer als $|\overline{PQ}|$. (4 BE)

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	4					II			X	
b	2	I				I	I	X		
c	5		II			II	I		X	
d	3	III			II		III			X
2 a	3			I	I	I		X		
b	4		II	II		II			X	
c	4	II	III	II	I		III			X

a $\overline{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overline{BC} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, d. h. $|\overline{AB}| = |\overline{BC}|$ (2 BE)

b Wegen $\overline{AB} \circ \overline{BC} = 0$ schließen die gleich langen Strecken \overline{AB} und \overline{BC} einen rechten Winkel ein.

$D(-5 | -5 | 12)$ (3 BE)

c $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -12 \end{pmatrix}$ liefert $x_1 = -10r - 5s$, $x_2 = -5s$ und $x_3 = -12s$.

Damit ergibt sich $12x_2 - 5x_3 = 0$. (3 BE)

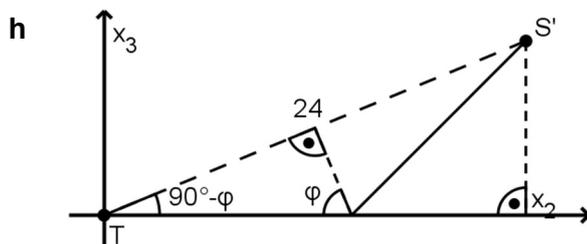
d $\tan \varphi = \frac{\frac{1}{2}|\overline{ST}|}{\frac{1}{2}|\overline{AB}|} = \frac{12}{5}$, d. h. $\varphi \approx 67,4^\circ$ (3 BE)

e Für B und C gilt $k \cdot 5 - 5 \cdot 12 = 5k - 60$. (2 BE)

f $k \cdot 0 - 5x_3 = 5k - 60 \Leftrightarrow x_3 = 12 - k$, d. h. E_k schneidet die x_3 -Achse im Punkt $(0 | 0 | 12 - k)$. Damit ergibt sich $-12 \leq k \leq 0$. (4 BE)

g Da sich F durch Spiegelung an der x_1x_3 -Ebene aus E ergibt, ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ -5 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von F.

$\begin{pmatrix} 0 \\ k \\ -5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ -5 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow k = \frac{25}{12}$ (4 BE)



$x_2 = 24 \cdot \cos(90^\circ - \varphi) \approx 22,2$ (4 BE)

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2					I		X		
b	3	I			I			X		
c	3					II			X	
d	3				II	I			X	
e	2	II				I			X	
f	4	II	III		II	II	II			X
g	4	II	I		I	II	II		X	
h	4	II	III		III	I	II			X

a X: Anzahl der fehlerhaften Kugeln

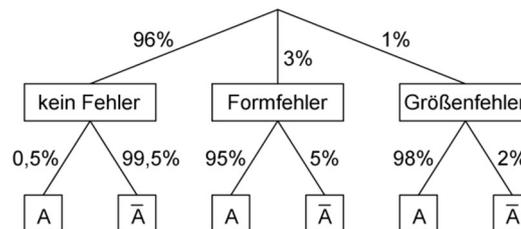
$$P_{0,04}^{800}(X < 30) \approx 33\% \quad (2 \text{ BE})$$

b Erwartungswert: $800 \cdot 0,04 = 32$

halbe Standardabweichung: $0,5 \cdot \sqrt{800 \cdot 0,04 \cdot 0,96} \approx 2,8$

$$P_{0,04}^{800}(30 \leq X \leq 34) \approx 35\% \quad (5 \text{ BE})$$

c A: Eine Kugel wird aussortiert.



(4 BE)

$$d \frac{0,01 \cdot 0,98 + 0,96 \cdot 0,005}{0,03 \cdot 0,95 + 0,01 \cdot 0,98 + 0,96 \cdot 0,005} \approx 34\% \quad (3 \text{ BE})$$

e Fehler zweiter Art: Das Unternehmen geht irrtümlich davon aus, dass der Anteil der fehlerhaften Kugeln nicht auf über 4 % angestiegen ist.

Konsequenz: Die Produktion wird nicht unterbrochen.

(3 BE)

f Unter der Annahme, dass die Nullhypothese zutrifft, soll die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl fehlerhafter Kugeln mindestens k beträgt, höchstens 3 % betragen bzw. die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl fehlerhafter Kugeln kleiner als k ist, größer als 97 % sein.

Damit müsste in der Ungleichung I „ $Y \geq k$ “ anstelle von „ $Y \leq k$ “ und in der Ungleichung II „ $Y < k$ “ anstelle von „ $Y \leq k$ “ stehen.

(4 BE)

g Die Zufallsgröße Z beschreibt die Anzahl z der zurückgegebenen Packungen.

$$(200 - z) \cdot 8,3 - z \cdot 5,8 \geq 1500 \Leftrightarrow 14,1z \leq 160 \Leftrightarrow z \leq 11$$

Damit: $P_{0,03}^{200}(Z \leq 11) \approx 98\%$

(4 BE)

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2			I		I	I	X		
b	5		II	II		I			X	
c	4				I	I	I	X		
d	3		II	II		I			X	
e	3	II							X	
f	4	III		II	II	II	III			X
g	4		III	I		II	II			X

1 a $P_{0,4}^{100}(30) \approx 1,0\%$ (1 BE)

b Zufallsexperiment: Zehn verkaufte Fahrräder werden zufällig ausgewählt.
Ereignis: „Mindestens zwei der Fahrräder sind Mountainbikes.“ (3 BE)

c Y: Anzahl der Mountainbikes
 $0,4 \cdot 250 = 100$
 $P_{0,4}^{250}(Y \geq 110) \approx 11,0\%$ (3 BE)

d M: Ein zufällig ausgewähltes verkauftes Fahrrad ist ein Mountainbike.
A: Ein zufällig ausgewähltes verkauftes Fahrrad hat einen Rahmen aus Aluminium.

	M	\bar{M}	
A	5 %		20 %
\bar{A}	35 %	45 %	80 %
	40 %		100 %

Der gesuchte Anteil ist $\frac{5\%}{40\%} = 12,5\%$. (4 BE)

e $P_{0,4}^{2099}(Y > 800) \approx 95,95\%$
 $P_{0,4}^{2100}(Y > 800) \approx 96,10\%$
Der Händler ist von mindestens 2100 verkauften Fahrrädern ausgegangen. (4 BE)

f $\frac{810}{0,36} = 2250$ (2 BE)

g Es ist möglich. Wurden beispielsweise im Juli 10 000 Fahrräder verkauft und im August 1000, so ergibt sich für diese beiden Monate insgesamt für den Anteil der verkauften Mountainbikes $\frac{0,44 \cdot 10000 + 0,52 \cdot 1000}{11000} < 0,46$. (3 BE)

2 a Erwartungswert: 500 g
Standardabweichung: 10 g (2 BE)

b X: Masse des Zuckers in Gramm
 $P(239 \leq X \leq 261) \approx 97,2\%$ und $P(238 \leq X \leq 262) \approx 98,4\%$ liefern $[238; 262]$. (3 BE)

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	1			I		I		X		
b	3	II		II	II		II		X	
c	3		II	II		I			X	
d	4		II			I	I		X	
e	4		III	II		II	II			X
f	2				I	I		X		
g	3	III	III		I	I	II			X
2 a	2				I	I		X		
b	3		II	II		II	II		X	